J. 1162

ENSAI

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 2000

Option **A.** – **MATHÉMATIQUES**

deuxième composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 4 pages (y compris celle-ci)

Tournez la page S.V.P.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les différentes parties sont dans une large mesure indépendantes.

L'objet du problème est l'étude d'une transformation qui, à certaines fonctions, associe une fonction numérique définie par une intégrale.

La première partie a pour objet l'étude de divers cas particuliers.

Dans la seconde partie, on étudie le cas particulier de fonctions périodiques, ce qui conduit à étendre la définition de la transformation.

Dans la troisième partie, on prouve le caractère C^∞ de la transformée.

Dans la dernière partie, on étudie le comportement en 0 de la transformée en fonction de diverses hypothèses faites sur la fonction d'origine.

Dans tout le problème on désigne par E l'ensemble des fonctions f telles que :

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$,
- $t \mapsto t f(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$,
- $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

PARTIE I

1. Soit f un élément de E et x un réel strictement positif ; prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{t f(t)}{x^2 + t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   On définit pour $x > 0$ et $f \in E$, la fonction F par :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t f(t)}{x^2 + t^2} \, \mathrm{d}t .$$

2. Déterminer si les fonctions suivantes sont dans E :

   a. $f_1 : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t)}$;

   b. $f_2 : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$.

3. Dans cette question, on considère la fonction $f(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^2}$.

   a. Justifier que $f \in E$ et que $\forall x > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \, \mathrm{d}t$.

   On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} \, \mathrm{d}t$.

   b. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

   c. Calculer $G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

   d. En déduire $F(x)$.

   e. Montrer que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et en utilisant les questions précédentes, calculer l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t .$$

4. Dans cette question, on considère $f(t)=\dfrac{\cos t}{t}$.
   a. Justifier que $f \in E$.

   Pour $x>0$, on pose $\varphi(x)=x\,F(x)$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. (On pourra utiliser le changement de variable $t=\dfrac{u}{n}$.)

   c. Montrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

   d. Prouver que sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ on a :
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)=0.$$
   En déduire que φ est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on déterminera.

   e. Déterminer explicitement φ puis F.

PARTIE II

Dans cette partie, f est une fonction non nulle définie sur $\mathbb{R}$, continue, périodique de période T.

1. Étudier la convergence de la série de terme général :
$$u_k=\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t,\quad k\geq 1.$$
2. En déduire que $f \notin E$.
3. On pose $h(y)=\displaystyle\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$ et $m=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Prouver que si $m\neq 0$, on a, au voisinage de $+\infty$, $h(y)\sim my$.
4. Prouver que si $m\neq 0$, l'intégrale :
$$\int_0^A \frac{t\,f(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$
   n'a pas de limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. (On pourra effectuer une intégration par parties.)
5. Prouver en revanche que si $m=0$, cette limite existe.

PARTIE III

1. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x,t)\neq(0,0)$:
$$\frac{t}{x^2+t^2}=\frac{\alpha}{x-it}+\frac{\beta}{x+it}.$$
   En déduire que pour tout couple de réels $(x,t)\neq(0,0)$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right|\leqslant\frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

2. Prouver que, pour toute fonction f de E, la fonction F définie au I.1. est de classe C^∞ et que l'on a pour tout entier $k>0$:
$$F^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV

1. Pour $f \in E$, on note Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t f(t)}{x^2 + t^2} \, dt .$$

Montrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Dans cette question, f désigne une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) \neq 0$ et dont la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est un élément de E.

Trouver un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+. (On pourra intégrer par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t f(t)}{x^2 + t^2} \, dt$.)

3. Dans cette question, f désigne un élément de E tel qu'on ait en 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{t}$.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + t^2} \, dt$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x F(x) = \frac{\pi}{2}$.